Prof. Dr. Alfred Toth

Grundlagen einer arithmetischen Semiotik

1. Die bereits in Toth (2012a,b,c) skizzierte arithmetische Semiotik basiert auf einer der Syntaxautonomie der generativen Grammatik verwandten Konzeption, bei der davon ausgegangen wird, daß die Information der semantischen und der pragmatischen Dimension des Peirceschen Zeichenmodells (Morris) auf die syntaktische, d.h. dem Mittelbezug entsprechende Dimension projizierbar ist. Die beiden möglichen Ordnungsstruktren des triadischen Zeichenmodells sind:

a) $(\{\Omega_1, ..., \Omega_n\} \rightarrow I \rightarrow M)$

b) $(I \rightarrow \{\Omega_1, ..., \Omega_n\} \rightarrow M)$.

mit den zugehörigen kategorialen Modellen

$$\begin{tikzcd} I \arrow[d] & \Omega \arrow[l] \arrow[dl] \\ M & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Omega \arrow[d] & I \arrow[l] \arrow[dl] \\ M & \end{tikzcd}$$

2. In der Peirceschen Zeichenrelation ZR = (M, O, I) repräsentiert nach Bense M "die **Kardinalität** der Zahl im Sinne der Repräsentation als Mächtigkeit", O repräsentiert "die **Ordinalität** der Zahl im Sinne der Repräsentation als Nachfolge", und I repräsentiert "die **Relationalität** der Zahl im Sinne der Repräsentation als Konnex" (Bense 1981, S. 26). Dementsprechend sprechen wir von kardinaler, ordinaler und relationaler arithmetischer Semiotik.

2.1. Anzahlklassen von Kardinalzahlen (vgl. Menne 1991, S. 110). Sei a, b, c ∈ {1, 2, 3}

2.1.1. $[a] \equiv x\hat{}.\ x = a$

2.1.2. $[a, b] \equiv [a] \cup [b] \wedge a \neq b$

2.1.3. $[a, b, c] \equiv [a] \cup [b] \cup [c] \wedge a \neq b \wedge b \neq c \wedge a \neq c$

bzw. Kardinalzahlen. Sei $x, y, z \in \{1, 2, 3\}$

2.1.4. $1 \equiv K\hat{}: \exists x.\ K = [x]$

2.1.5. $2 \equiv \hat{}K: \exists xy.\ K = [x, y] \wedge x \neq y$

2.1.6. $3 \equiv \hat{}K: \exists xyz.\ K = [x, y, z] \wedge x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z$

2.2. Transfinite Arithmetik von Ordinalzahlen (vgl. Menne 1991, S. 111). Sei $\omega \in \{1, 2, 3\}$

2.2.1. $\omega + n = \omega$

2.2.2. $\omega - n = \omega$

2.2.3. $\omega \cdot n = \omega$

2.2.4. $\omega/n = \omega$

2.2.5. $\omega^n = \omega$

2.2.6. $\sqrt{\omega} = \omega$

Zeichen haben somit insofern "transfiniten" Charakter, als z.B. die Addition zweier Zeichen zum selben Zeichen führt. Stellt man also etwa zwei statt eines Stoppschildes an einer Straßenkreuzung auf, so mag dies zwar wunderlich erscheinen, ändert aber am Zeichen selbst nichts. Zur Subtraktion sei immerhin vermerkt, daß auch die Abwesenheit eines Zeichens (z.B. ein plötzlich an einem Finger fehlender Ring, aus dem z.B. auf Ehescheidung geschlossen werden kann) ein Zeichen ist. Für die Multiplikation und Division von Zeichen gilt natürlich das der Addition und Subtraktion Entsprechende. Untersuchungen zum Begriff der Potenzierung und Radizierung von Zeichen fehlen ganz.

2.3. "Arithmetik" der Relationsfunktoren (vgl. Menne 1991, S. 146). Für R und S können Primzeichen, Subzeichen, Rumpfklassen (z.B. Dyaden-Paare), Zeichenrelationen usw. eingesetzt werden.

2.3.1. $R'' = R$

2.3.2. $(R^\circ)^\circ = R$

2.3.3. $R \cap S = S \cap R$

2.3.4. $R \cup S = S \cup R$

2.3.5. $(R \cap S)' = R' \cup S'$

2.3.6. $(R \cap S)^\circ = R^\circ \cap S^\circ$

2.3.7. $(R \cup S)^\circ = R^\circ \cup S^\circ$

2.3.8. $R \setminus S = R \cap S'$

2.3.9. $(R')^\circ = (R^\circ)'$

Literatur

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Menne, Albert, Einführung in die formale Logik. 2. Aufl. Darmstadt 1991

Toth, Alfred, Arithmetik-Autonomie. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2012a

Toth, Alfred, Zur arithmetischen Semiotik. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2012b

Toth, Alfred, Arithmetische Strukturen physischer und thetischer Zeichen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2012c

14.4.2012